Over de ontwikkeling der begrippen

RUIMTE EN TIJD

in verband met het relativiteitsbeginsel,

DOOR

DR. J. A. SCHOUTEN
Hoogleeraar aan de T. H. te Delft

ROTTERDAM
NIJGH & VAN DITMAR'S UITGEVERS-MAATSCHAPPIJ
1920

INHOUD.

Bladz.

VOORWOORD

De belangstelling, waarmede schrijver's populair artikel over de theorie van Einstein in „Het Handelsblad" van Donderdag 8 Januari 1920 werd ontvangen, hebben er hem toe gebracht, hetzelfde onderwerp hier uitvoeriger doch, naar hij hoopt, met dezelfde mate van populariteit te behandelen. Er zijn in den laatsten tijd zoo vele voor een grooter publiek bestemde verhandelingen over de relativiteitstheorie verschenen, dat er wel een excuus noodig is, wanneer men dit aantal nog met een wil vermeerderen. Een dergelijk excuus bestaat echter, daar de schrijver zich niet ten doel gesteld heeft het „wat", dat is de feitelijke opbouw der relativiteitstheorie, nog eens op zijne wijze te vertolken, doch veel meer de vraag naar het „hoe" en het „waarom" onder oogen heeft willen zien. Het „hoe", in zooverre als getracht is de ten grondslag liggende g e d a c h t e, afgescheiden van alle mathematische formuleering in het licht te stellen, het „waarom", waar een poging werd gedaan te doen zien hoe het relativiteitsbeginsel allerminst een los in de lucht hangend modeverschijnsel is, doch de noodzakelijke consequentie van een eeuwenlang ontwikkelingsproces.

Het boekje is berekend op lezers van „algemeene ontwikkeling", het bevat dienovereenkomstig geen enkele mathematische formule, en de enkele voorkomende vaktermen zijn omstandig verklaard.

Delft, Januari 1920.

J. A. SCHOUTEN.

OVER DE ONTWIKKELING DER BEGRIPPEN RUIMTE EN TIJD IN VERBAND MET HET RELATIVITEITSBEGINSEL

INLEIDING.

De nog zoo jonge algemeene of nieuwere relativiteitstheorie, die eerst omstreeks 1914 door A. Einstein werd opgesteld, kan reeds op groote resultaten terugzien. Niet alleen gelukte het Einstein een lang bekende doch tot nu onverklaard gebleven afwijking in de beweging van de planeet Mercurius uit zijn theorie te verklaren, hij wist ook te voorspellen, dat een lichtstraal, die dicht langs de zon passeert, een afwijking moet ondergaan, en deze voorspelling werd door de metingen der Engelsche expedities naar Sobral en Principe bij gelegenheid van de zonsverduistering van 29 Mei 1919 schitterend bevestigd. Dit laatste succes is van den aard als dat van Leverrier, toen hij door zuivere berekeningen het bestaan van de destijds nog onbekende planeet Neptunus nauwkeurig wist aan te wijzen.

Intusschen zou het nu geheel verkeerd zijn te meenen, dat de algemeene relativiteitstheorie haar beteekenis ontleent aan de verklaring, die zij voor deze beide zeer kleine effecten geeft. Toch is dit een meening, die buiten den engen kring van astronomen, natuurkundigen en natuurkundig geïnteresseerde mathematici veelal wordt aangetroffen. Men heeft daar den indruk, dat de nieuwe theorie een plotseling uit de lucht gevallen buitengewoon lastig en gecompliceerd apparaat is, dat met alle tot nu geldige opvattingen over ruimte, tijd en mechanica breekt, en dat dat alles dan alleen dient om voor enkele nauwelijks meetbare effecten een verklaring te vinden. De groote genialiteit van Einstein wil men, het voetspoor van bekende groote tijdgenooten volgende, wel gaarne erkennen, de opmerking wordt echter wel gewaagd, dat de ware natuurverklaring ook eenvoudig moet zijn en de hoop blijft uitgesproken, dat het eenmaal moge gelukken de effecten in kwestie op eenvoudige wijze op de basis onzer gewone van ouds beproefde begrippen over ruimte, tijd en materie te verklaren. Nu is zulk een oordeel, hoe begrijpelijk ook, niet billijk. In de eerste plaats is zij volstrekt niet zoo ingewikkeld en zeker niet ingewikkelder dan menige andere in hoog aanzien staande theorie op exact wetenschappelijk gebied. Dat de bestudeerder in het begin op moeilijkheden stuit, valt niet te ontkennen, deze moeilijkheden vinden echter hun oorzaak in de omstandigheid, dat de theorie gebruik maakt van onderdeelen der wiskunde, die door toevalligheden in de historie der opleiding aan onze scholen en Universiteiten juist vallen buiten het gebied, dat men op het oogenblik als voor „algemeene ontwikkeling" noodzakelijk heeft afgebakend.

Differentiaalmeetkunde, groepentheorie en invariantentheorie, de bedoelde onderdeelen, zijn niet lastiger dan andere deelen, zij behooren nu echter toevallig niet tot de algemeene leerstof, de beide laatste zijn zelfs voor de zuivere mathematici in vele Universiteiten geen eigenlijke examenvakken.

In de tweede plaats is de relativiteitstheorie geen plotseling opgekomen nieuwigheid, die met al het bestaande breekt ter wille van de verklaring van enkele kleine effecten. Integendeel, zij is de rijpe vrucht van een zeer geleidelijke ontwikkeling, die reeds bij Euclides begint en waartoe de grootste denkers het hunne hebben bijgedragen. Als noodzakelijk eindresultaat dezer ontwikkeling, die stap voor stap kan worden nagegaan, levert zij ons de mogelijkheid tot oplossing van de voor het geheele wetenschappelijk denken centrale problemen van ruimte en tijd, en het is vooral daaraan, dat zij haar buitengewone beteekenis ontleent. In het navolgende zal worden getracht van die ontwikkeling een beeld te geven. [1])

Euclidische en niet-euclidische meetkunde.

Het is bekend, dat het aan Euclides voor het eerst gelukte een opbouw der meetkunde te geven, waarbij enkele grond-

1) Den lezer zij aanbevolen bij de lezing het schema te volgen, dat aan het einde is opgenomen.

stellingen of axioma's als waar werden aangenomen, terwijl alle andere stellingen uit die grondstellingen konden worden bewezen. Hij trachtte zijn grondstellingen zoo eenvoudig te kiezen, dat een ieder ze ook zonder bewijs direct zonder bezwaar kon aanvaarden. Merkwaardigerwijze gelukte hem dat bij één axioma, het zoogenaamde parallellenaxioma, niet. Dat axioma luidt:

„In een plat vlak laat zich door een punt buiten een lijn „slechts één lijn trekken, die de gegeven lijn, hoever ook „verlengd, nooit snijdt."

Het valt op, dat deze stelling allerminst onmiddellijk vanzelfsprekend is, en toch zeker van een geheel andere orde van vanzelfsprekendheid dan een der andere axioma's, bijv.:

„Door twee punten kan altijd één en slechts één rechte lijn „gelegd worden."

Het gelukte Euclides niet het parallellenaxioma door een ander meer vanzelfsprekend te vervangen, hoewel wel als zeker mag worden aangenomen, dat hij lang zal hebben geaarzeld voor hij er toe overging een zoo weinig vanzelfsprekende stelling tot axioma te verheffen. Het getuigt wel van de buitengewone scherpte van zijn inzicht, dat hij zich niet door eenig schijnbewijs, zooals er later zoovele zijn gevonden, heeft laten verleiden het parallellenaxioma als bewezen stelling te aanvaarden.

Intusschen bleef het parallellenaxioma, dat van een zoo geheel anderen aard was als de andere axioma's, na Euclides een steen des aanstoots der wiskundigen en het gaf aanleiding tot het ontstaan van twee fundamenteele vraagstellingen:

A. Welke is de stelling van het parallellenaxioma tot de overige axioma's?

B. Zijn de axioma's der meetkunde a priori gegeven of gronden zij zich op de ervaring?

In de eerste fase van het onderzoek naar vraag A trachtte men het parallellenaxioma uit de andere te bewijzen, tal van schijnbewijzen werden gevonden en ontmaskerd, en men kwam weinig verder. Alleen gelukte het aan te toonen, dat het axioma in nauw verband staat met de stelling, dat de som van de hoeken van een driehoek altijd 180 graden is.

In de tweede fase begon men van een anderen kant en trachtte met behoud van de andere axioma's het parallellen-axioma te vervangen door een zijner beide tegenstellingen:

1. In een plat vlak gaat door een punt buiten een lijn meer dan één lijn, die de gegeven lijn, hoe ver ook verlengd, nooit snijdt.

of

2. In een plat vlak gaat door een punt buiten een lijn geen enkele lijn, die de gegeven lijn, hoe ver ook verlengd, nooit snijdt.

Men verwachtte nu, dat er ergens een tegenspraak zou optreden en daarmede ware dan indirect het parallellenaxioma uit de andere axioma's bewezen. Intusschen, de verwachte tegenspraak bleef uit, en het gelukte aan Lobatschewsky en Bolyay voor de eerste aanname en aan Riemann voor de tweede een op zich zelf logische meetkunde op te bouwen. In de eerste, de hyperbolische meetkunde, kon formeel worden bewezen, dat de som der hoeken van een driehoek grooter was dan 180 graden, in de tweede, de elliptische, dat die som juist kleiner was dan 180 graden. Voor de voorstelling had dit alles voorloopig echter nog niet de minste beteekenis.

In de derde fase gelukte het nu echter aan Riemann aan te toonen, dat de elliptische meetkunde juist de meetkunde is, die geldt op een boloppervlak. In een aardig Engelsch boekje, dat in zijn vertaling „Platland" heet, laat de schrijver ons kennis maken met wezens zonder dikte, wier wereld een plat vlak is. Aan dit beeld eenige uitbreiding gevende kan men zich een boloppervlak gemakkelijk denken als een wereld waarin wezens zonder dikte leven. Die wezens zullen hun kortste verbindingslijnen tusschen twee punten, die voor ons buitenstaanders groote cirkels op den bol zijn, zeker rechte lijnen noemen, en voor die rechte lijnen geldt dan de elliptische meetkunde. Inderdaad is algemeen bekend, dat de som van de hoeken van een boldriehoek grooter dan 180 graden is, en dat er door een punt buiten een grooten cirkel geen groote cirkel gaat, die den eersten niet snijdt, om de eenvoudige reden, dat alle groote cirkels op een bol elkaar snijden. Beltrami wist evenzoo verschillende oppervlakken aan te geven voor welker kortste verbindingslijnen de hyperbolische meetkunde geldt. Een dier oppervlakken lijkt bijvoorbeeld op een servetring. Op elk dier oppervlakken kan een figuur verschoven worden, zonder dat de onderlinge afstanden van zijn punten veranderen, de oppervlakken zijn zooals dat heet in zichzelf verschuifbaar. In de meetkunde dezer oppervlakken treden in de plaats van rechte lijnen de zoogenaamde g e o- d e t i s c h e lijnen op, en dat zijn hier weer de kortste verbindingslijnen, die zich tusschen twee punten laten trekken. [1])

Op andere oppervlakken, bijvoorbeeld het oppervlak van een ei of ook het meer bochtige van een aardappel geldt deze eenvoudige eigenschap niet meer, figuren laten zich daar niet meer verschuiven en de meetkunde op zulk een oppervlak is niet meer hyperbolisch of elliptisch, zij is niet-euclidisch in een veel algemeeneren zin. Zelfs behoeven geodetische lijnen niet de kortste verbindingslijnen te zijn, het kunnen ook de langste zijn, voorwaarde is alleen, dat hun lengte een extreme waarde heeft, hetzij minimum, hetzij maximum. Van dit laatste geval is het echter moeilijk een populaire voorstelling te geven.

Men kan zich nu op soortgelijke wijze een denkbeeld maken van drie afzonderlijke ruimten met elliptische, hyperbolische of algemeene meetkunde, indien men zich eerst een gewone of euclidische ruimte denkt van vier of meer afmetingen, en dan een ruimte van drie afmetingen, die in deze hoogere ruimte gekromd ligt op dezelfde wijze als een oppervlak gekromd ligt in onze gewone ruimte of een kromme lijn in een plat vlak. Van den aard der kromming hangt dan af welke meetkunde zal gelden. Natuurlijk moet men zich dit alles alleen *denken* en niet trachten zich meerdimensionale of gekromde ruimten *voor te stellen*. Voor onze voorstelling is toch karakteristiek, dat zij min of meer gebonden is aan de natuurlijke ruimte der ervaring. Daarmede is de derde fase van het onderzoek naar vraag A gekarakteriseerd.

Meetkunde en ervaring.

Inmiddels onderging vraag B een aparte behandeling, in het bijzonder nadat door Newton een scherpe definitie was gegeven van de begrippen a b s o l u t e r u i m t e en a b s o-

2) De lezer zij voor bijzonderheden verwezen naar het duidelijke halfpopulaire Nederlandsche boekje van Prof. H. de Vries: „De vierde dimensie".

lute tijd, die voor hem noodig waren voor den opbouw van zijn mechanica. Uitdrukkelijk erkent Newton, dat absolute ruimte en absolute tijd niet voor zinnelijke waarneming toegankelijk zijn, intusschen hebben zij bij hem toch objectief bestaan, d.w.z. zij zijn voor hem geen begrippen zonder meer, doch in zekeren zin bestaande *dingen*. Deze opvatting werd reeds vóór Kant aan scherpe kritiek onderworpen. Waar zich al vroeger de overtuiging gevestigd had, dat eigenschappen als kleur, hardheid enz. (de zoogenaamde secundaire qualiteiten der dingen) niet aan de dingen op zichzelf toekomen, doch slechts aan de dingen in verband met den waarnemer, drongen Leibniz, Law, Maupertuis, Eberhard e.a. door tot het besef, dat ook ruimte en tijd (de zoogenaamde primaire qualiteiten der dingen) evenmin reëel aan de dingen buiten verband met den waarnemer toekomen. Waar dan ook Kant in zijn bekende uitspraken zegt:

„Der Raum ist kein empirischer Begriff, der von äuszeren „Erfahrungen abgezogen wird."

„Der Raum ist eine notwendige Vorstellung a priori, die „allen äuszeren Anschauungen zum Grunde liegt."

„Der Raum stellt gar keine Eigenschaft irgend einiger Dinge „an sich oder sie in ihrem Verhältnissen zu einander vor."

„Der Raum ist nichts anderes als nur die Form aller Er- „scheinungen äuszerer Sinne, d.i. die subjective Bedingung „äller Sinnlichkeit, unter der allein uns äuszere Anschauung „möglich ist."

dan is *dat* niet principieel nieuw, doch geheel in overeenstemming met het denken van Kant's tijd. Iets nieuws treedt eerst op, waar Kant de bron aanwijst waaruit de begrippen ruimte en tijd ontspringen. Kant ziet de bron van deze begrippen alsmede van de zoogenaamde hoofdbegrippen of kategorieën (bijv. eenheid, veelheid, substantie, causaliteit) in een oerfunctie van het intellect zelf (de zoogenaamde synthese der apperceptie). Deze oerfunctie schept zoowel de kategorieën als ruimte en tijd, deze laatste zijn dus als het ware de vormen van ons bewustzijn, die iedere ervaring noodzakelijk moet aannemen, wil zij ervaring voor *ons* zijn. Merkwaardig is, dat Kant, niettegenstaande ruimte en tijd voortkomen uit dezelfde bron als de kategorieën, deze toch niet tot de kategorieën rekent. In verschillende perioden van zijn leven heeft hij over het verband tusschen ruimte en tijd en de kategorieën verschillend gedacht, en het is kenschetsend voor de scherpte van Kant's inzicht, dat de vraag naar dit verband, een vraag, die in dien tijd nog onmogelijk beantwoord kon worden, bij hem vaag en eigenlijk onbeantwoord blijft.

Hoewel nu de kategorieën, ruimte en tijd niet uit de ervaring ontstaan, daar zij immers zelf eerst de mogelijkheid voor alle ervaring scheppen, is het toch mogelijk, omgekeerd, uitgaande van de ervaring, door een abstractieproces tot die fundamenteele begrippen op te stijgen. Reeds Hegel merkte op:

„In der empirischen Wissenschaft ist die empirische An„schauung des Raumes das erste, und dann erst kommt man „auf den Gedanken des Raumes."

Voor de ruimte is dit voor het eerst gedaan door Pasch in 1882. De ervaring kent geen punten, lijnen en vlakken alleen kleine lichaampjes, draden en platen. Voor die voorwerpen der ervaring geldt geen enkele meetkundige stelling exact, om de eenvoudige reden, dat geen enkele meting een volkomen exact resultaat oplevert. De ervaring kent ook geen gelijkheid, want die wordt in absoluten zin nergens aangetroffen. De ervaring kent evenmin een „tusschen", althans wanneer met dat begrip ernst gemaakt wordt, want „tusschen" de kleinste materieele deeltjes houdt alle ervaring op. De natuurlijke ruimte der ervaring, zoo men hier het woord „ruimte" al gebruiken wil, is eigenlijk een samenstel van discrete deeltjes, dat in geen enkel opzicht continu is en waarvoor geen enkele meetkundige stelling exact geldt.

De voorstelling gaat nu boven die ervaring uit, zij laat de lichaampjes in de verbeelding hoe langer hoe kleiner worden en de draden en platen hoe langer hoe dunner. Verder postuleert zij een „tusschen" waar de ervaring geen tusschen kent, en schept zoo een soort van continuïteit, de ruimte der voorstelling. Men moet nu volstrekt niet denken, dat de voorstelling al komt tot de mathematische punten, lijnen en vlakken. Terecht merkt Wellstein op, dat men zich wel kan voorstellen, dat een zandkorreltje voortdurend kleiner wordt, maar dat de voorstelling daarbij nooit tot een eind komt, daar men zich altijd een microscoop voor kan stellen, waarvan de vergrooting in dezelfde verhouding toe-neemt, en het korreltje door dien miscroscoop bekeken altijd een korreltje blijkt te zijn en nooit een mathematisch punt wordt. De voorstelling blijft altijd in het vage, de voorstellingsruimte mist de realiteit van de ervaring en is aan de exactheid van het begrip nog niet toe. De voorstellingsruimten van twee personen van ongelijke ontwikkeling zijn dan ook volstrekt ongelijk en zelfs moeilijk vergelijkbaar. Van een exacte geldigheid van eenige meetkundige stelling in de voorstellingsruimte kan geen sprake zijn, om de eenvoudige reden, dat alle exactheid aan de voorstelling ontbreekt, van waarnemingsfouten valt zelfs niet te spreken, omdat er in de voorstellingsruimte, niet te experimenteeren valt. De punten der voorstellingsruimte zijn „ideaal", d.w.z. voor de ervaring niet toegankelijk, daar het geen dingen zijn maar voorstellingen en de voorstellingsruimte kan dan ook volstrekt niet worden waargenomen. Zij zijn echter ook voor het begrip niet toegankelijk, omdat het voorstellingen zijn en nog geen begrippen.

Terecht zegt H. Weber:

„Die ursprüngliche Vorstellung vom Raume enthält nichts
„genaues, nichts scharfes in sich. Es gibt darin keinen Punkt,
„keine Linie, keine Fläche und also auch keine Geometrie.
„Diese Begriffe sind erst Schöpfungen des denkenden Geistes."

Het begrip blijft niet bij de punten, lijnen en vlakken der voorstelling staan, maar gaat verder. In de eerste plaats knoopt het aan aan het verkleiningsproces, dat de voorstelling nooit tot een einde kan voeren en postuleert een grens, die de voorstelling nooit kan bereiken, het punt, de lijn en het vlak van het begrip. Daarmede schept het begrippen, waarvoor de meetkundige stellingen, die in de ervaring binnen de grenzen der waarnemingsfouten geldigheid hebben, en die voor de voorstelling alleen maar een soort richtsnoer ter vermijding van al te groote vaagte zijn, exact gelden.

In de tweede plaats voegt het begrip aan de aldus onmiddellijk aan de voorstelling aansluitende punten nog punten toe, die met de voorstelling niet meer in onmiddellijk verband staan, doch alleen dienen om een volledig stelsel te krijgen, waarvan de eigenschappen zich gemakkelijk laten formuleeren. Denken wij ons bijvoorbeeld eenige kleine materiedeeltjes, en nemen we aan, dat de waarneming leert, dat zij nagenoeg (d.w.z. binnen de grenzen der waarnemingsfouten) op gelijkmatige afstanden op een rechte lijn liggen, en dat er geen andere deeltjes in de buurt zijn. Nummeren we de deeltjes, dan ontstaat op de lijn een schaalverdeeling 1, 2, 3,.... De lijn is in eersten aanleg een product van de voorstelling en van deze lijn staan de punten 1, 2, 3 enz. in meer direct verband met de ervaring. Men kan zich nu voorstellen, dat de stukken tusschen de eerst aanwezige punten middendoor gedeeld worden, en dan hebben de punten $1^1/_2$, $2^1/_2$, enz. aan deze voorstelling hun ontstaan te danken. Exactheid is hier niet te verlangen, en men moet daar zelfs hier heelemaal niet naar vragen, aangezien voorstellingen zich aan iedere metende contrôle onttrekken. Ook een verdeeling in bijv. 7 deelen laat zich wel voorstellen, en men verkrijgt zoo de punten $1^1/_7$, $1^2/_7$, enz. Of een verdeeling in bijv. 23 deelen voor de voorstelling nog mogelijk is, is de vraag — zeker niet voor een Boschjesman, doch misschien wel voor een meer ontwikkeld persoon met een sterk voorstellingsvermogen. Bij nog fijnere verdeelingen begint zeker het begrip al mee te spreken, men kan echter toegeven, dat althans de mogelijkheid van fijnere verdeelingen voor de voorstelling nog beteekenis kan hebben. Zoo zijn dus alle punten, wier plaats zich door een quotiënt van twee geheele getallen laat aanduiden voor de voorstelling althans van eenige beteekenis. De lijn is, zooals dat met een vakterm heet, „overal dicht" met deze voorstellingspunten bezet, d.w.z. tusschen twee gegeven punten ligt altijd nog minstens één ander punt. Het begrip vormt in de eerste plaats naar aanleiding van deze voorstelling het begrip van een lijn bezet met begripspunten, wier plaats exact gegeven is door quotiënten van geheele getallen. Bovendien voegt het begrip nu nog punten toe, die overeenkomen met getallen als de wortel uit het getal 2, het getal π (omtrek cirkel gedeeld door diameter) e.d.m. en bovendien een punt „in het oneindige". Voor de voorstelling hebben deze toevoegingen geen beteekenis meer, zij bestaan alleen voor het begrip en leveren een lijn, die veel eenvoudiger meetkundige eigenschappen heeft dan de nog incomplete lijn, die direct aan de voorstelling aansloot. Aldus de geheele voorstellingsruimte behandelende, vormt het begrip om te beginnen die ruimte door exact maken en completeeren om tot begripsruimte. In de begripsruimte gelden de meetkundige eigenschappen, in het bijzonder dus de axioma's, exact, en nemen zij een bijzonder eenvoudigen vorm aan. Eigenlijk is die begripsruimte dan ook niets anders dan dit stelsel van niet met elkaar strijdige axioma's. Het is wel onnoodig te zeggen dat ook de begripsruimte niet kan worden waargenomen, en evenzoo dat men zich de begripsruimte ook niet kan voorstellen. Wel kan de begripsruimte aanleiding geven tot het vormen van voorstellingen, maar die vorming kan dan nog op tal van verschillende manieren plaats hebben. Zoo kan men aantoonen, dat er o.a. een stelsel van bollen, cirkels en punten bestaat, waarvoor alle axioma's gelden van de punten, lijnen en vlakken eener euclidische meetkunde. Dat stelsel vormt dan voor het begrip een ruimte met een euclidische meetkunde, het geeft echter aanleiding tot geheel andere voorstellingen. De punten, lijnen en vlakken der euclidische begripsruimte hebben dus niet speciaal iets te maken met de kleine, lange en platte beelden der voorstelling, zij staan evengoed in verband met heel andere voorstellingsvormen. Zij zullen verband houden met ieder stelsel van voorstellingsvormen, dat beantwoordt aan dingen der ervaring, waarvoor binnen de grenzen der waarnemingsfouten de euclidische axioma's gelden.

De mathematische ruimte van het begrip, in dit geval een euclidische ruimte, bestaat dus alleen voor het begrip en onafhankelijk van iedere voorstelling. Zij kan ook (zonder van nature expliciet in het begrip aanwezig te zijn) door het begrip geschapen worden zonder gebruikmaking van het beschreven abstractieproces doch uit de grondbegrippen of kategorieën, die het begrip in zichzelf aantreft. Haar bestaansrecht ontleent zij uitsluitend aan het niet logisch tegenstrijdig zijn harer axioma's. Hetzelfde geldt voor begripsruimten met andere soorten van meetkunde, deze kunnen evenzeer òf door een abstractieproces uit bepaalde groepen van ervaringsfeiten gewonnen worden, òf door het begrip als stelsel van niet strijdige axioma's worden gesteld. Voor het begrip zijn al deze meetkunden volkomen gelijkwaardig.

Wat dus eenerzijds door abstractie en veralgemeening gewonnen wordt is anderzijds juist datgene, wat uit de oerfunctie van het intellect ontspringt.

Dit is echter niets anders dan het begrip der getallenrij, verbonden met het begrip van de mogelijkheid van meerdere onafhankelijke getallenrijen „de afmetingen". Deze begrippen ressorteeren echter onder de Kant'sche kategorieën qualiteit en quantiteit, en wij hebben dus hier, althans voor de ruimte, de oplossing voor ons van de vraag, die Kant destijds uit den aard der zaak nog niet kon beantwoorden, de vraag naar het verband tusschen ruimte en tijd en de kategorieën. Voorzoover de ruimte ontspringt uit de oerfunctie van het intellect ressorteert zij onder de kategorieën en is a priori, al wat er verder bijkomt behoort niet tot de ruimte van het begrip maar ontspringt uit de ervaring of uit de voorstelling. Voor den tijd geldt hetzelfde.

Hoe verhoudt zich nu het parallellenaxioma tot de ervaring? Voor het begrip zijn alle meetkunden, euclidische, elliptische, hyperbolische en algemeene, volkomen gelijkwaardig. De ervaring zal zich stellig onder eenigen meetkundigen vorm, die de oerfunctie kan scheppen, voordoen, welke vorm zich echter het beste aan de ervaring aansluit kan alleen die ervaring zelf, d.i. het experiment, leeren. Wij begrijpen nu de waarde en de beteekenis van de metingen van de hoeken van groote driehoeken, die al door Gausz werden verricht met het doel een eventueel voorhanden afwijking te constateeren. Evenzoo de onderzoekingen van Zöllner en veel later van P. Harzer, die hebben nagegaan of wellicht een niet-euclidische meetkunde een betere verklaring der waargenomen physische en astronomische verschijnselen zou kunnen geven dan de euclidische. Deze proeven en pogingen, die velen vakphilosophen ten onrechte een gruwel waren, tasten geenszins de aprioriteit van de ruimte en den tijd van het begrip aan, zij betrekken zich alleen op de ruimte der ervaring.

Zöllner meent, dat de aanname van een oneindige ruimte tot een tegenstrijdigheid voert, aangezien er al een oneindige tijd verloopen is, en dus de eindige hoeveelheid aanwezige stof in een oneindige ruimte al verdampt zou moeten zijn. Hij wil dus, dat de ruimte eindig is en in zichzelf terugloopt zooals het oppervlak van een bol, maar dan één dimensie hooger. Harzer heeft zeer serieus nagerekend in hoeverre die aanname van een gesloten ruimte overeen te brengen is met astronomische waarnemingen. In het bijzonder wijdt hij de aandacht aan de

„nabeelden" van zon en sterren die bij die onderstelling zouden moeten ontstaan, terwijl hij ook voor de „kromming" mogelijke waarden berekent.

Intusschen mag nu bij deze proeven en theorieën een opmerking niet uit het oog verloren worden, die reeds door Riemann en von Helmholz gemaakt is en later door Poincaré sterk op den voorgrond gebracht werd. Een meting, bijvoorbeeld van de hoeken van een driehoek leert ons nooit iets over meetkundige eigenschappen op zichzelf, doch alleen iets over physische eigenschappen van materieele dingen. We gaan uit van bepaalde physische aannamen, bijvoorbeeld dat een meetstaaf bij verplaatsing even lang blijft enz. De uitkomst heeft dus naast meetkundige ook physisch-mechanische beteekenis, d.w.z. de meetkunde der ervaringsruimte en de physica zijn niet te scheiden. Veranderen we onze physische aannamen, dan komt er een andere meetkunde voor den dag. Omgekeerd kunnen we uitgaan van een heel willekeurige meetkunde mits we daarbij dan maar passende physisch-mechanische wetten aannemen. Het is de vraag of dit erg practisch is, zal men allicht tegenwerpen, maar in die tegenwerping ligt dan juist de kern van de kwestie: de vraag naar de ware meetkunde moet vervangen worden door de vraag naar de meest practische meetkunde en in deze vraag beslist het door zuiver inzicht geleide en geïnterpreteerde experiment.

De voorstelling heeft daarbij niets in te brengen. Zij zal zich eenerzijds, wil zij geen wanvoorstelling zijn, moeten aansluiten aan de ervaring, anderzijds zal zij zich, wil zij geen waanvoorstelling zijn, moeten aansluiten aan het begrip d.i. aan de resultaten der logische deductie. Over wat de ervaring leert kan, althans tusschen vakmannen, nooit een blijvende strijd bestaan, een dergelijke strijd kan altijd op den duur worden uitgemaakt door behoorlijk verrichte experimenten. Ook kan er geen blijvende strijd bestaan ten aanzien van wat de mathematische deductie leert, de gelijkelijk geschoold ondersteIde partijen kunnen alles samen narekenen. Wat echter voorstelbaar is en wat niet, hangt sterk af van ontwikkeling, geestesrichting, persoonlijke voorkeur enz. Een mogelijkheid uit te maken wie de „ware voorstelling" heeft, bestaat niet. Het is nu eenmaal wèl mogelijk elkaars experimenten en bewijsvoeringen te controleeren, doch niet mogelijk contrôle uit te oefenen op elkaars voorstellingen.

Over de waarde der voorstelling voor de ervaring zegt Wellstein:

„Die Erfahrung läszt sich nicht durch Gesetze bestimmen, die jeder sozusagen mit Händen greifen kann; was man an Gesetzen „der Anschauung zu entnehmen" glaubt, sind im günstigsten Falle nur Annäherungen, die den ersten ordnenden Versuchen des Denkens entstammen."

En over de waarde van de voorstelling voor het begrip:

„Aus der Anschauung allein flieszen immer nur isolierte und angenäherte Erkenntnisse; ob diese sich im Zusammenhange mit anderen Anschauungen widerspruchslos zu streng exakter Gültigkeit erheben lassen, kann nur durch Denkarbeit entschieden werden."

Absolute ruimte en absolute tijd.

Inmiddels was sinds Newton een derde fundamenteele vraag aan de orde gesteld:

C. Hebben de absolute ruimte en de absolute tijd physische realiteit?

We zagen dat voor Newton de absolute ruimte en de absolute tijd een objectief bestaan hadden en dienovereenkomstig erkende Newton dan ook een absolute beweging, d.i. een beweging ten opzichte van de absolute ruimte. In de Newton'sche mechanica is een andere aanname zelfs niet mogelijk, aangezien de verschijnselen van de centrifugaalkracht in deze mechanica niet verklaard kunnen worden door relatieve beweging alleen. De vergelijkingen leeren toch, dat op een lichaam, dat zich alleen in de wereldruimte bevindt, toch centrifugaalkracht kan optreden en die kracht kan dan op niets anders teruggevoerd worden dan op een draaiing ten opzichte van de absolute ruimte zelf.

Om den lezer goed duidelijk te maken tot welke zonderlinge consequenties dit voert, beluisteren we het bekende gesprek van Saturnus met zijn ring, die we beiden denken te bestaan uit een rekbaar materiaal. Saturnus ziet den ring draaien en zegt: de ring draait, er moet centrifugaalkracht optreden en tengevolge daarvan moet de ring uitgerekt worden, d.w.z. zich van mij verwijderen. De ring ziet echter Saturnus draaien en zegt: Saturnus draait, Saturnus moet zich tengevolge van de optredende centrifugaalkracht afplatten en in den evenaar een grooteren omtrek krijgen, d.w.z. naar mij toekomen. De meting zal nu gemakkelijk beslissen of Saturnus gelijk heeft of de ring, of beide in zekere mate. Heeft echter bijvoorbeeld alleen Saturnus gelijk, dan verklaart de Newton'sche mechanica dit door te zeggen, dat Saturnus ten opzichte van de absolute ruimte stilstaat en de ring zich beweegt. Als oorzaak voor een materieel effect treedt dus hier op de wisselwerking tusschen Saturnus en de absolute ruimte, d.w.z. de absolute ruimte wordt hier geacht een materieele werking te kunnen uitoefenen.

Hoe zonderling dat is moge uit het volgende verhaal blijken. Een reiziger komt in een dorp en wordt door de bewoners ontvangen in hun dorpshuis. Binnenkomende wordt hij plotseling van achteren aangeraakt, hij wendt zich om maar ziet niemand. Zijn hoed en jas worden hem door een onzichtbare macht afgenomen en op een geschikte plaats gedeponeerd, de hoofddeksels enz. der overige aanwezigen ondergaan dezelfde bewerking, zitplaatsen, tafels, ververschingen en alles wat maar wenschelijk is komen op den juisten tijd aanvliegen en plaatsen zich zonder eenige zichtbare oorzaak waar zij noodig zijn. Hoewel alles zeer aangenaam en in de grootste orde in zijn werk gaat begint de reiziger ietwat te griezelen, en hij vraagt aan een van zijn geleiders naar een verklaring. Op de meest natuurlijke wijze wordt hem dan medegedeeld dat het de begrippen orde en regelmaat zijn, die zich hier op zoo uitnemende wijze verdienstelijk maken. Die begrippen, hoort hij verder, kunnen niet gezien, niet gevoeld, niet gepakt worden en niet gewogen worden en zij uiten zich alleen door hunne aangename zorgen voor den goeden en ordelijken gang van zaken. De reiziger zal met deze verklaring wel niet zeer voldaan zijn en, thuisgekomen, vertellen dat er in het bewuste dorpshuis spoken zijn, vriendelijke, welwillende, zoo men wil nuttige spoken, maar niettemin spoken. Nu vervullen de absolute ruimte en de absolute tijd in de Newton'sche mechanica, die overigens volmaakt onwaarneembaar zijn maar alleen op het juiste oogenblik optreden om een behoorlijken en ordelijken opbouw der theorie mogelijk te maken, juist de mystieke rol van de begrippen orde en regelmaat in het dorpshuis, m.a.w. in de klassieke mechanica spookt het.

Newton ondervond dan ook onmiddellijk scherpe tegenkanting van de zijde zijner tijdgenooten. In het bijzonder verklaarde Huygens zich tegen alle absolute beweging en wenschte hij alleen relatieve beweging te erkennen, zooals blijkt uit een correspondentie met Leibniz. De groote moeilijkheid was echter een mechanica te begronden zonder gebruik te maken van absolute beweging en het is niet bekend geworden welke oplossing Huygens voor oogen had. Zonder die oplossing moest echter het strenge in zichzelf gesloten stelsel van Newton, dat overigens van alle toen bekende mechanische verschijnselen rekenschap wist te geven, het van de opvattingen der relativisten winnen. De negatieve praestatie, de kritiek der relativisten was schitterend, zoo o.a. ook die van Berkeley, de positieve praestatie, t.w. het vervangen der Newton'sche mechanica door een relativistische, bleef uit. De antinomie is zeer scherp gesteld door Euler. Daar het in dien tijd onmogelijk bleek de mechanica anders te fundeeren dan op de begrippen absolute ruimte en absolute tijd, besloot Euler, dat absolute ruimte en tijd wel iets van een reale existentie moesten bezitten, al was het hem dan ook geheel onmogelijk in te zien wat voor soort van realiteit dat zou kunnen wezen. Hij gaf dus aan de antinomie geen schijnoplossing, doch liet haar onopgelost, wat getuigt van de groote helderheid van zijn inzicht, en hij besloot met de profetische opmerking, dat er misschien wel iets niet in orde was met de verschillende klassen, waarin de wijsbegeerte van dien tijd de realiteiten indeelde. Euler voelde dus al, dat er een totale omwenteling noodig was om hier helderheid te brengen. Waar nu Kant, zooals we reeds zagen, later onherroepelijk aantoonde, dat aan de absolute ruimte en den absoluten tijd geen reale doch alleen ideale beteekenis kan toekomen, bleef als eenige uitweg de opbouw van een volkomen relativistische mechanica. Daarvoor was de tijd toen echter nog allerminst rijp.

Tal van onderzoekers hebben sindsdien getracht tot een dergelijke mechanica te komen, en in het bijzonder is Mach een der op den voorgrond tredende absolute relativisten. Een uitweg werd echter vóór Einstein niet gevonden. Wel kwam nog een belangrijke zijde aan het licht door de onderzoekingen van Neumann. Neuman verving de absolute ruimte door een hypothetisch lichaam Alpha, dat dan als reaal existeerend ding de werkingen te voorschijn zou moeten brengen, bijvoorbeeld de centrifugaalkracht, die van de ideale absolute ruimte niet te verwachten zijn. Waar nu echter dat lichaam Alpha weer voor geen enkele waarneming toegankelijk was, bleef het, om hetzelfde beeld te gebruiken, een spook, zij het dan ook nu een gematerialiseerd spook. De tijdgenooten onderwierpen dan ook het lichaam Alpha aan zoo scherpe kritiek, dat Neumann er toe overging het lichaam Alpha te identificeeren met de totale in het heelal aanwezige materie zelf (eigenlijk verving hij Alpha door het stelsel der hoofdtraagheidsassen dier materie, doch dat komt op hetzelfde neer). Dat was echter een belangrijke stap in de goede richting, want als oorzaak der centrifugaalkracht werd hierdoor het totaal der massa's in het heelal aangewezen. Behalve de zwaartekracht moest er dus nog een andere tot dusver onbekende kracht van materie op materie zijn, die we, denkende aan het oude lichaam Alpha, ter eere van Neumann de alphawerking zouden kunnen noemen. Ware het aan Neumann gelukt de wetten dezer nieuwe kracht te vinden, dan zou hij inderdaad een mechanica hebben kunnen opstellen, die, althans wat de ruimte betreft, spookvrij genoemd kon worden. Dit is echter aan Neumann nooit gelukt, in het begrip alphawerking waartoe zijn theorie ten slotte voerde, ligt echter de blijvende beteekenis van zijn werk.

Het KLEIN'sche principe.

We zijn thans genaderd tot een keerpunt in de ontwikkelingsgeschiedenis, het jaar 1872. In dat jaar publiceerde de bekende mathematicus F. Klein een beginsel, dat aansluitende aan onderzoekingen van Cayley een geheele omwenteling teweegbracht in de opvattingen betreffende de verschillende vormen van meetkunde. Dit beginsel kan als volgt duidelijk gemaakt worden. Ieder, die wel eens met meetkundige eigenschappen van driehoeken en andere figuren te doen gehad heeft, weet, dat het ons in de meetkunde niet interesseert of een driehoek, waar we mee bezig zijn, boven aan het papier staat of onderaan, of dat een bepaald hoekpunt naar boven of naar onder wijst, dat zijn topografische eigenschappen, geen meetkundige. Meetkundige eigenschappen zijn dus niet alle eigenschappen der figuren, maar alleen die, welke bij draaiingen, verschuivingen en spiegelingen onveranderd blijven. Nu zijn draaiingen, verschuivingen en spiegelingen voorbeelden van veranderingen van figuren, die de wiskundige „transformaties" noemt, alle draaiingen, verschuivingen en spiegelingen samen vormen een „groep [1]) van transformaties" en de wiskundige zegt derhalve met een vakterm: de elementaire gewone meetkunde handelt over die eigenschappen, die invariant zijn bij (d.i. onveranderd blijven bij) een bepaalde transformatiegroep, te weten de groep der draaiingen, verschuivingen en spiegelingen.

Nu zijn er nog wel andere transformaties van meetkundige figuren, wat ieder weet, die wel eens een borduurwerk op stramien scheef getrokken heeft of een wat scheef genomen fotografie van een gevel of een vlakke wandschildering vergeleken heeft met het origineel. Ook het beeld, dat op ons netvlies wordt ontworpen van een hellend gehouden vlakke figuur, is een goed voorbeeld van een al vrij ingewikkelde transformatie, waarbij bijvoorbeeld rechte hoeken volstrekt niet alle recht blijven. Er zijn dus behalve draaiingen en verschuivingen nog wel meer ingewikkelde transformaties en vele transformatiegroepen, die voor den wiskundige zeer interessant zijn. F. Klein gaf nu het volgende schijnbaar zeer eenvoudige doch in werkelijkheid buitengewoon ver strekkende principe:

Iedere meetkunde is een theorie over de invarianten behoorende bij bepaalde transformatiegroepen, en omgekeerd behoort bij iedere groep een bepaalde meetkunde.

Daarmede was met één slag het centrale gezichtspunt bereikt, van waaruit het geheel aller meetkunden kon worden overzien. In het bijzonder is het Klein'sche principe voor de fundamenteele vraag A sluitsteen, het onderzoek naar deze vraag was hiermede principieel afgeloopen. Al naarmate men een andere groep van transformaties ten grondslag legt, ressorteert een euclidische, een elliptische, een hyperbolische of ook de een of andere veel algemeenere vorm van meetkunde. Tegelijk

1) Er zijn aan het begrip „groep" nog enkele finesses verbonden, die hier niet besproken behoeven te worden.

echter was het Klein'sche principe voor de fundamenteele vragen B en C de noodzakelijke voorwaarde voor verderen vooruitgang. Dit principe stelt ons toch in staat de fundamenteele vraag B, die zich inmiddels reeds gereduceerd had tot de vraag, welke de meest practische meetkunde voor de ervaringsruimte is, en evenzoo den naar aanleiding van vraag C ontstanen eisch van een absoluut relativistische mechanica, op geheel nieuwe wijze te formuleeren.

Assenstelsels en overgangen van het eene stelsel op het andere.

We moeten daartoe eens de wijze beschouwen, waarop men de een of andere physische gebeurtenis in getallen kan beschrijven. Nemen wij bijvoorbeeld een rechthoekig laboratorium, dan is de plaats van een deeltje volkomen gegeven door zijn hoogte boven den vloer, en zijn afstanden tot 2 zijwanden, bijvoorbeeld den noordelijken en den oostelijken wand. Die 3 getallen heeten dan de koordinaten van het deeltje, de vloer en de wanden heeten de koordinaatvlakken en de drie lijnen waar vloer en wanden samenkomen de koordinaatassen. Het ons interesseerende gebeuren is nu geheel bekend, wanneer we weten, hoe de koordinaten van elk deeltje met den tijd veranderen, en dat kan worden neergelegd in vergelijkingen tusschen de koordinaten. Natuurlijk is men geheel vrij een ander stelsel van drie onderling loodrechte koordinaatassen te nemen en hetzelfde verschijnsel te beschrijven door vergelijkingen, die op dat nieuwe assenstelsel betrekking hebben. Heeft men zoo de verschijnselen beschreven ten opzichte van allerlei vaste assenstelsels, dan is het zeer interessant te vragen, of nu al die verschillende beschrijvingen, dat zijn dus de verkregen vergelijkingen, denzelfden vorm hebben of niet. Blijven we voorloopig bij de onbeweeglijke rechthoekige assenstelsels, die dus alle door verschuivingen en draaiingen uit elkaar kunnen ontstaan, en nemen we eens aan, dat het onderzoek leert, dat de vergelijkingen van eenig gebeuren hun vorm niet veranderen bij overgang van het eene tot het andere stelsel, dan kunnen we dat in mathematische taal ook zoo zeggen, dat de verschijnselen invariant zijn bij de groep der verschuivingen en draaiingen.

Herinneren we ons nu echter, dat bij deze groep een meetkunde hoort, en wel de gewone euclidische, dan spreekt het vanzelf, dat voor verschijnselen van dezen aard die soort van meetkunde de meest aangewezen meetkunde is. Zijn de vergelijkingen niet invariant bij verschuivingen en draaiingen dan zijn er zeker wel transformaties te vinden, waarbij zij wel invariant zijn. Het zou zelfs wel eens kunnen blijken, dat er een transformatiegroep was, waarbij de vergelijkingen van alle mechanische en physische verschijnselen invariant waren. In dat geval zou zeker de meetkunde zijn, die bij die groep behoort, de meest practische meetkunde zijn, die aan ons wereldbeeld ten grondslag gelegd zou kunnen worden. De vraag naar de meest practische meetkunde der ervaringsruimte formuleert zich dus nu als volgt:

Welke vergelijkingen geven het best rekenschap van de waargenomen verschijnselen en bij welke transformaties der ruimtelijke koordinaten zijn deze invariant.

De bij de groep der gevonden transformaties behoorende meetkunde is dan de meest practische.

Tot nu bespraken we alleen vaste assenstelsels, de verschijnselen kunnen echter ook beschreven worden ten opzichte van beweeglijke assenstelsels, bijvoorbeeld t.o.v. een assenstelsel, dat vastzit aan een wagentje, dat door het laboratorium rijdt. Men kan zich bijvoorbeeld een waarnemer denken, die met het wagentje mee beweegt en nu van zijn beweeglijk standpunt de verschijnselen beschrijft. We kunnen dan weer vragen of de vergelijkingen invariant blijven. Voor de klassieke mechanica is dat bijvoorbeeld het geval, wanneer het bewegende assenstelsel niet draait en ook niet op andere wijze een versnelde beweging heeft. In de transformatiegroep treden dan niet alleen de drie koordinaten op, maar ook de tijd en de werkingssfeer van die groep is dus een uitgebreidheid (het woord ruimte zou hier verwarrend werken) van vier afmetingen.

Van die uitgebreidheid kunnen we ons een voorstelling maken door nu niet één maar twee dimensies lager te gaan, Platland voorbij, naar de bewoners van „Lijnland", wier wereld niet een oppervlak maar een lijn is. Van het geheele wereldgebeuren in Lijnland kunnen we ons een overzicht verschaffen, door op een blad papier alle gebeurtenissen die zich in de „ruimte" van Lijnland (die we ons voor een oogenblik eens voorstellen als een rechte lijn) na elkaar afspelen, naast elkaar te teekenen. We krijgen dus een oneindige reeks van verticale rechte lijnen naast elkaar, die elk de ruimte van Lijnland voorstellen op één bepaald oogenblik. Het aldus ontstane beeld waarin we met één oogopslag verleden, heden en toekomst overzien, heet de wereldfilm van Lijnland. Een bewegend punt teekent in de wereldfilm de een of andere kromme lijn af en die lijn noemen we wereldlijn van het punt. Die wereldfilm is nu een twee dimensionale uitgebreidheid, de zoogenaamde ruimte-tijdwereld van Lijnland. Ook Platland heeft een wereldfilm, die een ruimte van drie afmetingen vult. Al wat in Platland na elkaar gebeurt ligt in die film, wanneer Platland bijvoorbeeld altijd horizontaal gedacht wordt, boven elkaar. De opvolgende standen van een bewegend punt zien we in de film allemaal tegelijk als wereldlijn van dat punt. Een driehoekige Platlandbewoner (de schrijver van „Platland" verzekert ons, dat alle Platlanders mooie regelmatige vormen hebben) beschrijft in de film een soort van kromme buis met driehoekige doorsnede, en zijn geheele leven zien we met één oogopslag voor ons liggen. De wereldfilm van onze wereld vult op dezelfde wijze een vierdimensionale uitgebreidheid, onze ruimte-tijdwereld, en we moeten ons die nu natuurlijk niet als een vierdimensionale ruimte willen gaan voorstellen, want dat heeft evenmin zin als het voor den Lijnlander zou hebben zich zijn wereldfilm als plat vlak (iets dat hem totaal onbekend is) voor te stellen.

In die vier afmetelijke ruimte-tijdwereld kunnen we nu algemeen vragen, bij welke transformaties in deze uitgebreidheid de vergelijkingen der verschijnselen invariant blijven. Daar we voorloopig onderstellen, dat de tijd zelf niet meegetransformeerd wordt (immers wat zou dat voor physische beteekenis kunnen hebben?), komt dat daarop neer, dat we vragen of de vergelijkingen ook soms invariant zijn bij overgang tot zekere bewegende assenstelsels. Mochten we ook hier zulke transformaties vinden, dan bepaalt hun groep de meest practische meetkunde der ruimte-tijdwereld. Reeds zagen we in de klassieke mechanica een geval van zulk een invariantie bij overgang tot een bewegend niet versneld assenstelsel.

Er is echter ook onmiddellijk een geval aan te wijzen waar de invariantie niet optreedt. Beschrijven we namelijk de mechanische verschijnselen volgens de klassieke mechanica eerst ten opzichte van een absoluut vast, dan ten opzichte van een draaiend assenstelsel, dan treedt in het tweede geval o.a. de centrifugaalkracht op, die in het eerste geval ontbreekt. Hetzelfde verschijnsel valt op te merken, indien voor het tweede stelsel een in rechte lijn voortbewegend doch versneld (of vertraagd) stelsel gekozen wordt. Ieder reiziger in een trein, die plotseling wordt geremd, voelt de in het vertraagde stelsel optredende kracht aan den lijve. De vergelijkingen der klassieke mechanica zijn dus bij transformaties waarbij versnellingen optreden zeker niet invariant.

Formuleering van den relativiteitseisch.

We kunnen nu de vraag opwerpen, wanneer een mechanica en physica absoluut relativistisch zal zijn. Dat zal alleen dan het geval zijn, wanneer iedere materieele werking in de niet levende natuur op een materieele oorzaak terug te voeren is (niet meer op het ingrijpen van eenig „spook"). Dat wil dan echter zeggen, dat de transformatiegroep, waarbij de verschijnselen invariant zijn, alleen mag afhangen van de verdeeling der materie[1]) in de vierdimensionale ruimtetijdwereld d.w.z. van de wereldfilm, die door het physisch gebeuren in die wereld wordt afgeteekend. Nu zou het wel eens kunnen zijn, dat bij die transformaties ook de tijd mee verandert, d.w.z. dat er in de getransformeerde vergelijkingen een grootheid optreedt, die aldaar als een soort van tijd fungeert zonder dezelfde tijd te zijn uit de oorspronkelijke vergelijkingen. Zelfs zal een absoluut relativistische wereldbeschrijving moeten eischen, dat het al of niet transformeeren van den tijd afhangt alleen van de materieverdeeling en van geen vooropgezette onderstellingen, daar anders de tijd zijn mystieke rol zou blijven spelen, en we het eene spook hadden verdreven alleen om het ander met des te meer zorg te koesteren.

---

1) Materie is hier steeds in den ruimsten zin bedoeld, dus electriciteit inbegrepen.

De transformatiegroepen der mechanische en der electromagnetische verschijnselen.

Wat is nu de transformatiegroep der klassieke mechanica? De vergelijkingen blijven invariant bij overgang tot een stilstaand verschoven of gedraaid assenstelsel, en ook tot assenstelsels, die zich met eenparige snelheid voortbewegen. Echter niet meer zoodra het assenstelsel een versnelling heeft, wat bijvoorbeeld altijd het geval is wanneer het roteert. De geoorloofde transformaties worden saamgevat onder den naam van Galileitransformaties ter eere van Galilei, die een voorlooper was van Newton, en we kunnen dus zeggen, dat de klassieke mechanica invariant is bij de Galileigroep. De bijbehoorende meetkunde is de gewone euclidische en de groep is onafhankelijk van de materieverdeeling, d.w.z. de Newton'sche mechanica is niet-relativistisch, wat we al wisten. Merkwaardiger wijze zijn nu de electromagnetische verschijnselen, zooals die door de Maxwell'sche vergelijkingen beschreven worden, volstrekt niet invariant bij de Galileigroep. Een bewegende electrische lading vertoont bijvoorbeeld voor een meebewegenden waarnemer alleen een electrisch veld, waarentegen voor een stilstaanden waarnemer ook een magnetisch veld, en de vergelijkingen zien er dus voor die twee waarnemers heel anders uit. Dat werd dan o.a. verklaard door den volmaakt rustenden aether, ten opzichte waarvan alle beweging plaats heeft, en die hier dezelfde rol speelt als de absolute ruimte bij Newton of het lichaam Alpha bij Neumann. Dat voert tot een eigenaardige consequentie. Denken we ons een statief en daarop aangebracht een gloeilamp met daartegenover geplaatsten spiegel. De gloeilamp kan een lichtsein uitzenden en er moge een inrichting voorhanden zijn om den tijd te meten, verloopen tusschen het uitzenden van den straal en den terugkeer van den teruggekaatsten straal. Nu kan men het statief òf absoluut laten rusten òf laten bewegen in de richting gloeilamp — spiegel òf ook in de richting loodrecht daarop. Volgens de vergelijkingen voor de voortplanting van het licht moet nu in de beide laatste gevallen een verschillende tijd gemeten worden. Het experiment, door Michelson uitgevoerd, en waarvoor natuurlijk in werkelijkheid een veel ingewikkelder apparatuur noodig was, leerde nu echter, dat het theoretisch verwachte verschil niet optreedt. Men kan dit ook nog op andere wijze zeggen, waardoor het verrassende en nieuwe sterker naar voren komt, men kan zeggen, dat het experiment van Michelson leert, dat de snelheid van het licht dezelfde is ten opzichte van een stilstaanden, als ten opzichte van een bewegenden waarnemer. Beweegt zich dus een trein met een snelheid van dertig meter per seconde en werpt een stilstaande signaallamp een lichtstraal in de richting van de beweging langs den trein, dan heeft dat licht een snelheid van 300.000 K.M. per seconde ten opzichte van de rails en precies dezelfde snelheid ten opzichte van den trein, niet zooals men allicht zou verwachten en zooals de oude theorie ook leerde 299.999,97 K.M. per seconde. Lorentz heeft deze afwijking verklaard door zijn contractiehypothese. Volgens deze hypothese ondergaat ieder bewegend voorwerp een verkorting in de richting van de beweging en deze verkorting maakt dan, dat de maatstaf, waarmede de bewegende waarnemer de snelheid meet, een andere wordt als die van den stilstaanden waarnemer. In de vergelijkingen komt die verandering natuurlijk voor den dag als een verandering van koordinaten, dus als dat, wat we een transformatie genoemd hebben. Daarbij deed Lorentz nu nog een buitengewoon gewichtige ontdekking. De electromagnetische vergelijkingen bleken namelijk voor den stilstaanden en voor den bewegenden waarnemer geheel gelijk te worden, indien de bewegende waarnemer zich maar bedienen wil niet van den gewonen tijd, dien de uurwerken bijvoorbeeld van de kerktorens aanwijzen, maar van een hulpgrootheid, die we zoolang eens „fictieve tijd" zullen noemen. Dat wil dan zeggen, dat de electromagnetische verschijnselen nu invariant zijn geworden bij transformaties in de vierdimensionale ruimtetijdwereld, die ook den tijd niet met rust laten, dat zijn dus juist transformaties van het soort, dat we reeds boven verlangd hebben. Het totaal van deze transformaties noemt men de Lorentzgroep en deze is, daar zij den tijd niet met rust laat, blijkbaar een geheel andere dan de Galileigroep. Bij de Lorentzgroep behoort een eigenaardige vierdimensionale ruimtetijd-meetkunde, die we de Minkowski'sche noemen, en die, wat de driedimensionale ruimte betreft, euclidisch is. De Galileigroep en de Lorentzgroep hebben dus dit gemeen, dat zij beide voor de driedimensionale ruimte een euclidische meetkunde vragen. Tot zoover is nu de bewegende waarnemer volstrekt niet in dezelfde conditie als de stilstaande, zijn fictieve tijd heeft heelemaal geen physische beteekenis, zijn vergelijkingen schijnen slechts mathematische „Spielereien" en alleen de ten opzichte van den aether rustende waarnemer, die met den echten tijd werkt, heeft gelijk.

De oudere relativiteitstheorie.

Nu trad Einstein op met de volkomen formuleering der eerste of oudere relativiteitstheorie. We kunnen dien overgang het beste als volgt karakteriseeren. Denken we ons eens alle uurwerken, die op mechanische werking berusten, afgeschaft en vervangen door zuiver electromagnetische uurwerken. Een lichtstraal, die tusschen twee evenwijdige volkomen spiegelende vlakjes voortdurend heen en weer gekaatst wordt, levert ons bijvoorbeeld theoretisch zoo'n uurwerk. We stellen nu beide waarnemers, de stilstaande en de bewegende, in het bezit van een dergelijke klok. De stilstaande ondervindt daarvan geen verandering, zijn nieuwe klok wijst precies hetzelfde aan als vroeger de torenklokken. De klok van den bewegenden waarnemer is onderworpen aan de electromagnetische vergelijkingen en aan niets anders, die klok wijst dus die grootheid aan, die in die vergelijkingen de rol van tijd vervult, en dat is juist de fictieve tijd van zooeven. De twee waarnemers zijn nu precies in dezelfde conditie gekomen, beide hebben hun eigen uurwerk, en hun eigen tijd, die daarop wordt afgelezen, en van geen van beiden kunnen we meer zeggen, dat hij werkt met een tijd, die minder physische beteekenis heeft dan die van den ander. Ziedaar het grondprincipe der oudere relativiteitstheorie. Vragen we nu waar precies de overgang is tusschen Lorentz en Einstein, dan is dat niet te zeggen, hun verdiensten zijn niet te scheiden en aan het genie van beiden danken wij deze eerste of oudere relativiteitstheorie.

De nieuwe theorie stond direct voor tal van moeilijkheden. De mechanische verschijnselen schenen invariant bij de Galileigroep, de electromagnetische bij de Lorentzgroep, mechanische klokken schenen er een wezenlijk anderen gang op na te houden als electromagnetische en de eenheid van ons wereldbeeld scheen totaal verbroken. Bovendien bevat de Lorentzgroep alleen overgangen op assen, die zich met gelijkmatige snelheid, dus zonder eenige versnelling voortbewegen, en de nieuwe theorie wordt dus al direct ontoepasselijk, zoodra er een versnelde beweging optreedt. Versnelde bewegingen treden echter practisch overal op, en er was dus eigenlijk een onhoudbare toestand geschapen. Van een werkelijk volkomen relativistische mechanica en physica scheen men nog ver verwijderd. De oplossing werd echter spoedig gebracht door Einstein.

De algemeene of nieuwere relativiteitstheorie.

Om die oplossing te vertolken gaan we weer naar de bewoners van Lijnland en vragen ons eens af wat een volkomen relativist onder de Lijnlanders voor een wereldbeeld zal verlangen. De Lijnlanders mogen beschikken over klokken waarop zij hun tijd aflezen. De ruimte-tijdwereld of wereldfilm van Lijnland is een tweedimensionale uitgebreidheid, en het is ons om de in die uitgebreidheid geldige meetkunde te doen. Mocht die meetkunde bijvoorbeeld een euclidische zijn, dan zouden wij ons de wereldfilm kunnen denken als een plat vlak, ware zij elliptisch, dan als een bolopperblak, en in een meer algemeen geval als een willekeurig gebogen oppervlak, dat in onze eigen driedimensionale ruimte gekromd voor ons ligt.

De Lijnlander kent nu mechanische en physische verschijnselen, en deze zullen bij bepaalde transformaties invariant zijn. Wenscht hij echter een zuiver relativistisch wereldbeeld, dus een zonder „spoken", dan moet hij verlangen, dat de aard dezer transformaties niet van te voren gegeven is, doch u i t s l u i t e n d afhangt van de materieverdeeling in de wereldfilm. Met onverbiddelijke consequentie volgt daar echter uit, dat de meetkunde, die voor de wereldfilm als buitengewoon practisch aangewezen is, die meetkunde is, die volgens het Klein'sche principe behoort bij de aldus door de materieverdeeling bepaalde groep van transformaties. De vorm van het gebogen oppervlak, waarop de wereldfilm van de Lijnlanders is afgeteekend, moet dus geheel afhangen van de verdeeling der materie over de film. Wij driedimensionale wezens kunnen nu precies dezelfde eischen opstellen als de Lijnlanders, alleen in alles twee dimensies hooger, en dan ontstaat juist, wat Einstein ons in zijn algemeene relativiteitstheorie geeft. Einstein stelde zich geheel op de basis eener volkomen relativistische natuurverklaring, waarin de transformatiegroep, waarbij de verschijnselen invariant zijn, alleen afhangt van de materieverdeeling, en het is zijn bijzondere verdienste, dat hij differentiaalvergelijkingen wist aan te geven, waardoor het verband tusschen de materieverdeeling en de transformatiegroep werd aangegeven. Een zeer fijn trekje is, dat de differentiaalvergelijkingen de transformatiegroep niet eenduidig bepalen, men heeft dus nog een zekere vrijheid in de keuze der transformatiegroep, en practisch wil dat zeggen, dat men aan de ruimte tusschen de kleinste deeltjes een binnen zekere grenzen willekeurige meetkunde mag geven. Hilbert heeft aangetoond, dat dan toch alles, wat werkelijk physisch bestaat, eenduidig door de vergelijkingen bepaald is, en dat is dan ook het eenige wat we verlangen kunnen, de rest is slechts interpretatie van de zijde van den waarnemer en mag niet worden vastgelegd, willen we niet weer „spoken" invoeren. Het spreekt nu wel vanzelf, dat de bij de gekozen groep behoorende meetkunde der vierdimensionale ruimte-tijdwereld niet de euclidische is, want bij iedere wijze van verdeeling der materie over de wereldfilm behoort een eigen meetkunde, die voor die verdeeling de meest practische is. Natuurlijk zijn we, zooals reeds boven uit de opmerkingen van Riemann, van Helmholz en Poincaré bleek, geheel vrij toch een euclidische meetkunde te gebruiken, de natuurwetten nemen dan echter op die basis beschreven een anderen en zeker minder eenvoudigen vorm aan. We kunnen ons dus onze vierdimensionale wereldfilm denken als een vriedimensionale uitgebreidheid, die gekromd ligt in een uitgebreidheid van meer afmetingen en om de overeenkomst met Lijnland volkomen te maken een wezen in die hoogere uitgebreidheid, die onze film voor zich heeft en er van buiten af op zit te kijken.

Men moet nu uit het feit, dat de meest practische meetkunde in hoofdtrekken wordt vastgelegd door de materieverdeeling niet afleiden, dat hier weer de wisselwerking tusschen materie en ruimte wordt ingesmokkeld, die we juist boven hebben verworpen. Op zoo'n manier zou men ruimte en tijd, die niets anders zijn dan een begripsschema, weer materialiseeren.

Een voorbeeld kan dit verduidelijken. Alle gegevens van de bevolking van een land kunnen ordelijk worden samengevat in een bevolkingsstatistiek. Zoo'n statistiek is een begripsschema, en dat schema is uit den aard der zaak afhankelijk van gebeurtenissen als epidemieën, oorlogen enz. Dat is echter geen materieele werking, waarop men de wet van actie en reactie zou mogen toepassen, om te concludeeren, dat nu de statistiek omgekeerd ook materieelen invloed zou kunnen uitoefenen op de bevolking. Niet het sterftecijfer bepaalt de sterfgevallen, maar de sterfgevallen bepalen wel het sterftecijfer. Zoo bepaalt ook de materieverdeeling de meest practische meetkunde, maar er kan geen werking van ruimte en tijd uitgaan op de materie, zooals de klassieke mechanica dat zou verlangen.

Wat moeten we nu echter verstaan onder onze driedimensionale eigenlijke „ruimte"? We dalen weer twee dimensies af en denken ons de wereldfilm van Lijnland als een gebogen oppervlak voor ons liggen. Nemen we aan, dat het een of ander stelsel van naast elkander liggende kromme lijnen op die film zoo is gelegen, dat elke lijn ervan Lijnland op een bepaald tijdstip voorstelt. De tijd zij daartoe op de een of andere geschikte wijze gedefinieerd. Al wat dan n a elkaar gebeurt zien wij toeschouwers n a a s t elkaar voor ons. Nu bepaalt de materieverdeeling een transformatiegroep in de voor ons liggende film, waarbij alle verschijnselen in Lijnland invariant zijn. We kunnen dus met behulp van transformaties dier groep de kromme lijnen op de een of andere wijze op de film verschuiven en verbuigen, en wanneer we dan maar voor tijd nemen wat d i e z e l f d e transformaties ons opleveren, dan is het zoo verkregen stelsel van elkaar in dien nieuwen tijd opvolgende Lijnlanden volkomen gelijkgerechtigd met het eerste. Wat nu voor Lijnland geldt, geldt ook voor onze ruimte, al kunnen we dat dan met de voorstelling niet meer zoo mooi volgen. De in den tijd op elkaar volgende fasen onzer ruimte kunnen op zeer verschillende wijze in de vierdimensionale ruimte-tijdwereld gekozen worden, mits men bij elke keuze een passende definitie aan den tijd geeft. Het zal echter in het algemeen niet mogelijk zijn die ruimten zoo te kiezen, dat er een euclidische meetkunde in geldt, althans wanneer men wil vasthouden aan het beginsel die meetkunde te nemen, die het eenvoudigste is, dat is dus die, welke met de transformatiegroep in verband staat. Principieel is men echter in de keuze der meetkunde der ruimte veel vrijer dan in die van de ruimte-tijdwereld, daar de laatste immers direct van de gegeven materieverdeeling afhangt. Men kan als het ware van de vierdimensionale ruimte-tijdwereld op verschillende manieren een driedimensionale doorsnede maken en elk zoo'n doorsnede kan bij een passende definitie van den tijd als ruimte op een bepaald tijdstip opgevat worden, die voor op bepaalde wijze bewogen waarnemers „de" ruimte is. De splitsing van de wereldfilm in ruimte en tijd hangt dus af van den toestand van den waarnemer en is niet voor iedereen op dezelfde wijze gegeven.

Wanneer we nu zoo de oude ons zoo wel vertrouwde euclidische meetkunde vaarwel zeggen terwille van de eenvoudigheid der natuurverklaring, dan mag daar dan ook wel wat heel bijzonders tegenover staan, de mechanisch-physische vergelijkingen mogen wel erg eenvoudig worden, willen zij een zoo ingrijpende daad wettigen. Dit is nu echter ook inderdaad het geval, en dat laat zich het gemakkelijkste toonen aan de beweging van een zwaar massadeeltje. Beschouwen we zulk een deeltje, dat zich onder den invloed van de zon en eenige planeten moge bewegen. In de klassieke mechanica ziet die beweging er allerminst eenvoudig uit, de baan van het deeltje is een zeer ingewikkelde kromme lijn. Daarentegen blijkt de wereldlijn in de ruimte-tijdwereld buitengewoon eenvoudig te zijn, het is de eenvoudigst denkbare lijn, namelijk de geodetische lijn, die we reeds boven ontmoetten, en die de meest rechte lijn is, die zich in die vierdimensionale uitgebreidheid laat trekken. We hebben hier met een geval te doen, waarbij die geodetische lijn altijd den maximum afstand geeft. De Engelsche astronoom Eddington, die niet al te best over de Engelsche vakvereenigingen (trade-unions) te spreken is, heeft daarover de volgende politieke aardigheid ten beste gegeven. Hij zegt, een zwaar massadeeltje heeft trade-union-achtige allures, het gebruikt voor het doorloopen van zijn wereldlijn altijd den grootst mogelijken tijd.

Mercurius als een voldoende klein deeltje beschouwende kunnen we dus constateeren, dat de wereldlijn van Mercurius een geodetische lijn is. De baan van Mercurius is nu een soort van projectie van die lijn op onze driedimensionale ruimte en volstrekt geen geodetische lijn meer. Physisch drukken we dat zoo uit, dat er „krachten" zijn, zwaartekracht en alphawerking, die de baan van Mercurius van een geodetische lijn doen afwijken. Hier wordt de relativiteitstheorie theorie der zwaartekracht, en komt tegelijk de alphawerking voor den dag. Wat zich aan ons als zwaartekracht en alphawerking vertoont is een gevolg van het feit, dat een geodetische lijn in de ruimte-tijdwereld zich tengevolge van den aard der meetkunde in die wereld op deze ruimte niet als een geodetische lijn projecteert.

Onze driedimensionale ruimte heeft een meest practische meetkunde die in de buurt van de zon, die als zware massa de meetkunde sterk beïnvloedt, merkbaar van de euclidische afwijkt. Dat heeft ten gevolge, dat de baan van Mercurius (de binnenste planeet) er anders uitziet, dan wanneer de meetkunde euclidisch was, en het hier optredende verschil is juist de afwijking in de beweging, die reeds vóór Einstein uit de waarnemingen bekend was, doch nog geen afdoende verklaring gevonden had, en die nu door de relativiteitstheorie verklaard is.

Ook de wereldlijn van een lichtstraal is een geodetische lijn. De baan van een lichtstraal is dus dezelfde als die van een met lichtsnelheid voortbewegend massadeeltje, d.w.z het licht ondervindt den invloed van de zwaartekracht en gedraagt zich dus als iets, dat zwaarte heeft. Tegenover de vroegere theorieën geeft dit voor een lichtstraal, die langs den rand der zon gaat, een afwijking van 0,85 boogseconden, in de onderstelling, dat in de driedimensionale ruimte een euclidische meetkunde zou gelden. Deze afwijking is niet in strijd met de theorie van Newton, zelfs heeft Newton in zijn optica steeds de vraag aan de orde gesteld of wellicht het licht door de zwaartekracht beïnvloedt wordt. Nu is echter de meetkunde onzer driedimensionale ruimte in de nabijheid van de zon niet euclidisch en geeft nog eens een afwijking, die toevallig even groot is als de eerste en in dezelfde richting. Deze tweede afwijking is natuurlijk niet met de op euclidischen grondslag rustende klassieke mechanica te verklaren. Totaal moet dus volgens de relativiteitstheorie een afwijking van 1,7 boogseconden resulteeren, en dat is practisch, wanneer men de waarschijnlijke waarnemingsfouten in rekening brengt, juist het bedrag, dat thans door de Engelsche expedities gevonden is. De waarnemingen hebben dus zoowel bij Mercurius als bij den lichtstraal geleerd, dat de meest practische meetkunde in de buurt van de zon merkbaar van de euclidische afwijkt.

De tegenwerping van de zijde der alledaagsche voorstelling.

De lezer, die tot hier geduldig gevolg heeft, komt nu met een tegenwerping, die voor hem buitengewoon belangrijk is, en die hem vooralsnog belet de theorie volledig te apprecieeren. Hij zegt, alles goed en wel, dat is allemaal logisch in orde, en de experimenten zullen ook wel goed zijn, maar ik kan mij die nieuwe ruimte en dien nieuwen tijd absoluut niet voorstellen. Is hij wat meer belezen, dan staaft hij zijn bewering door tal van paradoxen ten aanzien van den gang van klokken aan te halen, die uit de relativiteitstheorie voortvloeien, paradoxen die aan de voorstelling werkelijk een harde noot te kraken geven. Hij houdt zich dan toch maar liever bij de euclidische ruimte en bij de gewone opvattingen over mechanische en electrische verschijnselen.

Dit bezwaar, dat iedere leek, die voor het eerst met de theorie in aanraking komt, noodzakelijk voelen moet, mag volstrekt niet worden genegeerd, maar moet behoorlijk onder oogen gezien worden. Dan heft het zich echter ook vanzelf op.

Men merke op, dat het hier niet gaat om denken, om begrijpen, want alles wat behoorlijk gedefinieerd is en geen tegenstrijdigheden bevat laat zich door het begrip vatten. Het gaat alleen om de voorstelling.

In de eerste plaats is het genoemde bezwaar er een van particulieren aard, geen twee menschen zijn, wat hun voorstellingsvermogen betreft, gelijk, en niemand kan aan een ander voorschrijven hoever hij met zijn voorstellingsvermogen kan en mag gaan en hoever niet. In de tweede plaats leert de historie, dat wat al niet voorstelbaar geacht wordt met den tijd sterk wisselt. De relativiteitstheorie is nog slechts enkele jaren oud en de voorstelling heeft nog slechts kort en nog maar bij enkelen den drang gevoeld zich aan te passen. In de derde plaats zijn er tal van dingen, ook in de oudere natuurverklaring, die men zonder meer accepteert en die toch moeilijk voorstelbaar geacht kunnen worden. Zoo is bijv. in de euclidische meetkunde m.i. volstrekt niet alles voorstelbaar. Ik voor mij acht het onmogelijk twee rechte lijnen, die, hoever ook verlengd, elkaar nooit snijden, met de voorstelling te volgen, en de mogelijkheid van zulke lijnen is voor de euclidische meetkunde juist essentieel. Ook een steeds grooter wordende driehoek, wiens hoekensom 180 graden blijft, mede een essentieel punt der euclidische meetkunde, is m.i. met de voorstelling niet te volgen. Van de physische verschijnselen zijn alleen de mechanische met de voorstelling te volgen, en met de electromagnetische wil dat maar niet gelukken. Dat de voorstelling hier inderdaad te kort schiet, blijkt uit het groote aantal „hulpvoorstellingen", dat in den loop der jaren verzonnen is om den wensch naar voorstellingen tegemoet te komen.

De eisch, dat een natuurverklaring geheel met de voorstelling gevolgd moet kunnen worden, is dan ook een eisch, die in redelijkheid niet gesteld mag worden. Veelmeer is deze eisch te beschouwen als een overblijfsel uit den tijd, toen de menschheid aan het door het begrip geleide experiment en aan het tot mathematische exactheid geschoolde begrip nog niet toe was, en trachtte zich een wereldbeschouwing op te bouwen uit de vage beelden der voorstelling.

Hulpvoorstellingen zullen ten allen tijde van groote waarde blijven, in het bijzonder als tijdelijk richtsnoer voor den experimentator, en aan hulpvoorstellingen, die ons het nieuwe ruimte- en tijdbegrip nader brengen, ontbreekt hte reeds nu niet, en zal het in de toekomst zeker nog minder ontbreken.

Nimmer echter mag de voorstelling worden geproclameerd tot rechter om te oordeelen over een theorie, die voor het forum van begrip en experiment haar bestaansrecht bewezen heeft. De voorstelling heeft zich, zoo mogelijk direct, zoo noodig langs den weg der hulpvoorstellingen, aan te passen aan wat begrip en experiment leeren. Zij is een hulpmiddel, een tusschenstadium tusschen experiment en begrip, dat als zoodanig buitengewoon nuttig kan zijn, zij heeft echter zelf niets in te brengen.

De theorie van WEYL.

Het zou nu niet juist zijn den lezer in den waan te laten, dat er in de nieuwere relativiteitstheorie geen enkele moeilijkheid meer overblijft, en wij reeds nu in staat zijn het geheele physische gebeuren met behulp van die theorie te verklaren. Niets is natuurlijk minder waar dan dat. Op enkele moeilijkheden kan nog even gewezen worden. Zooals boven gezegd, wordt de transformatiegroep, waarbij alle verschijnselen invariant moeten zijn, bepaald door de materieverdeeling, en men kan daaraan uitdrukking geven door differentiaalvergelijkingen, die door Einstein zijn aangegeven. Nu zijn die differentiaalvergelijkingen niet de eenige mogelijke en het is dus nog volstrekt niet zeker of de Einstein'sche opstelling niet voor verdere verbetering vatbaar is. Wij hebben hier te doen met een eersten stouten stap, die al op groote resultaten kan bogen, maar die niet de laatste stap behoeft te zijn. Reeds heeft Weyl er de aandacht op gevestigd, dat er in een klein hoekje der relativiteitstheorie nog een oud niet relativistisch aanhangseltje is blijven zitten, een klein spookje dus, dat, toen de groote spoken absolute ruimte en absolute tijd verdreven werden, aan de aandacht ontsnapt is. Hij heeft op dat spookje meedoogenloos het volle licht laten vallen, en practisch wil dat zeggen, dat hij o.a. tot een ietwat andere opstelling der differentiaalvergelijkingen is gekomen, die zeker alle aandacht verdient. Of er nog meer van die spookjes zijn is niet ineens te overzien, maar het is in het geheel niet uitgesloten, dat er nog eens een formeele klopjacht gehouden moet worden.

Teneinde iets van het beginsel duidelijk te maken, dat aan de theorie van Weyl ten grondslag ligt, knoopen we aan aan de bekende reeds bovengenoemde eigenschap, dat de som van de hoeken van een driehoek op een bol grooter dan 180° is. Met een vakterm heet de afwijking van 180 graden het sferische exces, en in de meetkunde bewijst men, dat dat exces niet voor alle driehoeken even groot is, maar aangroeit naarmate de driehoek grooter wordt. Denken we ons nu een vlaktewezen op een boloppervlak om een driehoek heen wandelen met hoeken van bijvoorbeeld 65, 80 en 85 graden, dan zal die bolbewoner bij het omslaan van het eerste hoekpunt 115 graden (dat is 180 min 65) draaien, bij het tweede 100 graden en bij het derde 95 graden, totaal 310 graden. Ware het vlaktewezen op zijn plaats gebleven, dan zou het 360 graden om zijn middelpunt hebben moeten draaien om eenmaal met het gezicht naar alle windstreken toegekeerd te zijn, bij het doorloopen van den driehoek is hem echter datzelfde gelukt met een totale draaiing van 310 graden, dat is 50 graden minder. Dit is een zeer eigenaardige ervaring, die alleen in een gebogen tweedimensionale wereld en niet in een plat vlak kan worden beleefd, en die een vlaktewezen dus als een criterium zou kunnen gebruiken om uit te maken of hij in een gebogen oppervlak of in een plat vlak leeft. Het is daartoe alleen noodig, dat hij in staat is behoorlijk te meten of, en hoeveel, hij op eenig oogenblik om zijn middelpunt draait. Hij zou dat kunnen doen door waarneming van voorwerpen in zijn buurt, dat is echter een weinig bevredigende methode, want wanneer die voorwerpen dan zelf eens bewegen en door elkaar dwarrelen wordt een meting onmogelijk.

Nu bestaan er echter instrumenten waarmede dat inderdaad mogelijk is. De bekende slinger van Foucault, waarmede men de draaiing van de aarde ten opzichte van de vaste sterren kan constateeren, ook wanneer die sterren in het geheel niet zichtbaar zijn, is een dergelijk instrument. We onderstellen nu het wezen op het boloppervlak in het bezit van zoo'n instrument en wel een van een zeer eenvoudig soort, namelijk een mechanisme, dat, hoe ook de drager zich moge bewegen, zelf nooit meedraait. Dat instrument noemen we een k o m p a s l i c h a a m. Bij het omloopen van den driehoek draait nu de wandelaar achtereenvolgens 115, 100 en 95 graden ten opzichte van het kompaslichaam of, wat hetzelfde is, het kompaslichaam draait in totaal 310 graden ten opzichte van hem. Na de beweging is dus de wandelaar in zijn oorspronkelijken stand terug, maar het kompaslichaam is 50 graden ten opzichte van zijn vroegeren stand uitgeweken, en dat niettegenstaande het kompaslichaam toch geen oogenblik gedraaid heeft, want krachtens zijn constructie kan het immers nooit draaien. We kunnen nu zeer algemeen zeggen wanneer een oppervlak plat is, d.w.z. wanneer er een euclidische meetkunde in geldt. Dat is dan en alleen dan het geval, wanneer een kompaslichaam, langs de een of andere gesloten baan, die bijvoorbeeld een driehoek kan zijn maar ook iets anders, steeds, hoe we die baan ook kiezen, in zijn uitgangspunt teruggekeerd, niet in stand veranderd blijkt te zijn. In alle andere gevallen geldt de een of andere niet-euclidische meetkunde. Brengt men een kompaslichaam langs twee verschillende wegen van een punt A naar een punt B, dan volgt hieruit, dat de eindstand van het lichaam alleen bij een euclidische meetkunde altijd in beide gevallen hetzelfde is, en bij een niet-euclidische meetkunde afhankelijk is van den gekozen weg. Woordelijk hetzelfde geldt nu voor uitgebreidheden van drie, vier of meer afmetingen, en het kompaslichaam levert dus een eenvoudig middel den aard van een uitgebreidheid te onderzoeken.

Het merkwaardige gedrag van het kompaslichaam in een niet-euclidische ruimte brengt met zich, dat in zoo'n ruimte het begrip evenwijdigheid zijn beteekenis verliest. Nemen we eens onze gewone euclidische ruimte, dan weet ieder, dat een vertikale lijn voor ons een andere richting heeft dan voor een bewoner van New York, maar we zijn overtuigd, dat we onze vertikale richting in New York zouden kunnen vertoonen eenvoudig door die richting evenwijdig aan zichzelf, dat is zonder draaien, naar New York over te brengen. We kunnen bijvoorbeeld die richting in een kompaslichaam markeeren en dan het kompaslichaam langs een willekeurigen weg overbrengen en het ter contrôle weer terugbrengen. Ware onze ruimte niet euclidisch, dan zou dit onmogelijk worden, omdat de toestand waarin het kompaslichaam te New York aankwam afhankelijk zou worden van den weg dien het lichaam doorloopen had. Het ware derhalve totaal onmogelijk op twee verschillende plaatsen twee onderling evenwijdige richtingen te definieeren.

We denken ons nu onze vierdimensionale ruimte-tijdwereld of wereldfilm voor een oogenblik euclidisch. Dan zou het mogelijk zijn een richting door een bepaald punt evenwijdig aan zichzelf naar een ander punt over te brengen op één enkele wijze, die onafhankelijk ware van de materieverdeeling in de wereldfilm. We zouden dus een meetkundige betrekking hebben tusschen twee richtingen, onafhankelijk van de materieverdeeling, d.w.z. het zou in ons wereldbeeld spoken. Nu zagen we reeds, dat het, om deze spoken te verdrijven, noodzakelijk is, dat de meetkunde afhangt van de materieverdeeling. Dan is inderdaad alles in orde, we kunnen een richting wel met behulp van een kompaslichaam zonder draaien naar een ander punt overbrengen, maar het resultaat hangt van den doorloopen weg af en van de meetkunde, d.i. van de materieverdeeling, zoodat we niet een van te voren door iets buiten de materieverdeeling vastgelegd resultaat volgen.

Het is nu mogelijk om den stap van Weyl te begrijpen. In de Einstein'sche relativiteitstheorie werd als vanzelfsprekend aangenomen, dat de maat van 1 centimeter (en evenzoo 1 seconde) van eenig punt van de wereldfilm kan worden overgebracht naar eenig ander punt op een wijze, die geheel van den doorloopen weg en van de materieverdeeling onafhankelijk was. M.a.w. men nam aan, dat het kompaslichaam eventueel gedraaid maar toch altijd nog even groot in zijn uitgangspunt terugkeerde na een gesloten baan doorloopen te hebben. Weyl heeft met groote scherpzinnigheid opgemerkt, dat men dat volstrekt niet van te voren mag vastleggen, maar dat in een consequente relativiteitstheorie, ook de afmetingen van het teruggekeerde kompaslichaam moeten afhangen van de materieverdeeling in de wereldfilm en van niets anders.

Daarmede heeft hij dan inderdaad het spook verdreven, dat in de Einstein'sche relativiteitstheorie er buiten de materieverdeeling om voor zorgt, dat de afmetingen van het kompaslichaam na een omgang niet veranderd zijn, op dezelfde wijze als Einstein het spook (de absolute euclidische ruimte) verdreven had, dat er in de klassieke mechanica voor zorgt, dat de stand van het kompaslichaam na een omgang niet veranderd is. De consequenties van de Weyl'sche theorie laten zich nog slechts zeer gedeeltelijk overzien, te meer daar ook op het standpunt van Weyl nog verschillende mogelijkheden ten aanzien van de differentiaalvergelijkingen bestaan.

Ook heeft men nog geen experiment kunnen bedenken waaraan de theorie van Weyl zou kunnen worden getoetst.

Makrokosmos en Mikrokosmos.

Bij het onderzoek der verschillende mogelijkheden, die ten aanzien van differentiaalvergelijkingen bestaan, is aan den dag gekomen, dat de vorm dezer vergelijkingen ten nauwste samenhangt met de vraag of wij ons de ruimte als oneindig of als eindig en gesloten (dus als een gesloten oppervlak maar dan een dimensie hooger) moeten voorstellen. Anderzijds is gebleken, dat de vorm der vergelijkingen evenzeer samenhangt met onze denkbeelden over de samenstelling der materie met name over electronen en positieve kernen van atomen. De geweldige draagwijdte der relativiteitstheorie treedt hier wel sterk in het licht, waar zij eenerzijds ingrijpt in astronomische vraagstukken betreffende den opbouw van het heelal, anderzijds in physische vraagstukken betreffende atoomstructuur. Dit voor oogen kan men zeker niet met grond verwachten, dat de relativiteitstheorie spoedig haar beslag zal krijgen en heelemaal in orde zal zijn, veelmeer moet men zich voorstellen, dat er met Newton een ontwikkelingsfase begonnen is, die met Einstein is geëindigd, en dat wij nu aan het begin staan van een nieuwe ontwikkelingsfase der exacte wetenschappen, waarvan het einde voor ons nog niet is te zien.

Slotopmerking.

Men moet nu vooral niet denken, dat in die nieuwe nu aangebroken periode de oudere theorieën al hare waarde verloren hebben, dat de Newton'sche mechanica, de Maxwell'sche vergelijkingen en in het bijzonder ook de theorie van den aether geheel nutteloos geworden zouden zijn. Al deze theorieën blijven als grondslag, zij het dan gecorrigeerd en van een verruimd standpunt beschouwd, in het nieuwe voortleven. Wat den aether betreft, zullen wij nu wel moeten erkennen, dat deze tot onze interpretatie der verschijnselen behoort en niet ergens als ding bestaat, doch dat neemt niet weg, dat het dikwijls even gewenscht kan zijn een aether in te voeren, als het een of ander assenstelsel, dat immers ook eigenlijk niet bestaat, doch alleen voor onze behoefte geschapen wordt. Juist de eigenaardige bijzonderheid der relativiteitstheorie, dat zij vele meeningen en opvattingen naast elkaar als gelijkgerechtigd erkent en alleen het betrekkelijke er van in het licht stelt, maakt het haar als geen vroegere mogelijk verschillende uiteenloopende gedachtengangen te erkennen en te waardeeren.

Er is in dit opzicht een groot verschil te constateeren tusschen den geest van redelijkheid en van laten gelden van verschillende meeningen, die de aangebroken nieuwe fase kenmerkt, en den betrekkelijk starren en dogmatischen geest van het afgeloopen tijdperk. Dit verschil is van het grootste belang ook buiten het terrein der exacte wetenschappen. De voortgang der wijsbegeerte in de achttiende en negentiende eeuw stond sterk onder den invloed der zich ontwikkelende exacte wetenschappen, en in de toekomst zal die invloed zeker niet minder sterk zijn. De zoo geweldige omwenteling, die op exact wetenschappelijk gebied plaats heeft, zal ongetwijfeld en misschien reeds spoedig haar werking doen gevoelen op andere gebieden van menschelijk denken en in het bijzonder onze algemeene wereldbeschouwing in redelijken zin ontwikkelen en verruimen.

SCHEMA

Euclides — Newton

I. Hoe verhoudt zich het parallellen-axioma tot de andere axioma's?

1. Zoeken naar een bewijs.
2. Axiomatische onderzoekingen:
   Bolyay.
   Lobatschewsky.
   Riemann.
3. Realiseering op gebogen oppervlakken:
   Riemann.
   Beltrami.

4. Het Klein'sche principe:
   Meetkunde = invariantentheorie bij bepaalde transformatiegroepen.

II. Hoe verhouden zich de axioma's tot de ervaring?

1. Aprioriteit van ruimte en tijd:
   Kant.
   Pasch.
2. De meetkunde onverbrekelijk verbonden met mechanica en physica:
   Riemann.
   v. Helmholtz.
   Poincaré.

3. Welke vergelijkingen geven het best rekenschap der verschijnselen en bij welke transformaties zijn deze vergelijkingen invariant:
   Galileigroep.
   Lorentz-contractie.
   Lorentzgroep.
4. Eerste relativiteitstheorie:
   Lorentz-Einstein.

III. Hebben absolute ruimte en absolute tijd physische realiteit?

1. Negatief-kritisch relativisme:
   Huygens.
   Euler.
   Kant.
   Berkeley.
   Mach.
2. De alphawerking:
   Neumann.

3. Eisch: De transformatiegroep in koordinaten en tijd is bepaald door de verdeeling der materie.

Algemeene relativiteitstheorie
Einstein.
Weyl.

Theorieën over den opbouw van het heelal.

Theorieën over den opbouw van het atoom.

Veld van het hedendaagsche onderzoek.

NIJGH & VAN DITMAR'S
UITGEVERS-MIJ

TELEGRAMMEN:
NIJGH-DITMAR, ROTTERDAM
TELEFOON:
7841-7842-7843-7861

OPGERICHT 1837

Zy/v.L. ROTTERDAM, 2 Februari 1920
WIJNHAVEN 111-113

den HoogGel.Heer Prof. J.A.Schouten E.I.

Rotterdamscheweg 2, 5

DELFT.

HoogGel.Heer,

Wy hebben nog te beantwoorden Uw schryven van 17 Januari betr. de uitgave van Uw manuscript " Begrippen over Ruimte en Tyd ".

Hoewel wy gaarne toestemmen, dat voor een dergelyk onderwerp veel belangstelling is, deelen wy tot onze spyt Uw optimisme, wat de verkoop van dit werk betreft, niet. Daar het echter een werk is van geringen omvang, zyn wy bereid dit uit te geven op een tantième-basis van 15 % van den verkoopsprys over elk verkocht exemplaar. Deze verkoopsprys zal vermoedelyk worden ± f 1.90.

Wy hebben gerekend op 50 present-exemplaren voor U.

Indien U in beginsel met ons accoord gaat, zullen wy U dezer dagen contract ter teekening toezenden.-

Inmiddels

met de meeste hoogachting

p.proc. N.V. NIJGH & VAN DITMAR'S UITG. MIJ.

[illegible signature]

3-2-20
accoord mits 15% [illegible]
ook van 2e [illegible]
geldt en [illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible] Kan dit
[illegible] Engeland? Prof
[illegible]

De uitgever meende aanvankelijk dat een oplage van 500 exemplaren voor Schoutens boekje over "Ruimte en Tijd" ruim voldoende zou zijn. Uit de hiernaast afgedrukte brief blijkt dat er aanmerkelijk meer belangstelling bestond. Zelfs in 1938 werden er nog exemplaren van het boekje verkocht (zie de brief op bladzijde 118).

NIJGH & VAN DITMAR'S
UITGEVERS-MAATSCHAPPIJ

Zy/v.G.

ROTTERDAM, 6 Mei 1925
WIJNHAVEN 113

Den Hooggeleerden Heer Prof.Dr. J.A.Schouten. e.i.
Rotterdamscheweg 2[5]
D E L F T .

Hooggeleerde Heer,

Inderdaad is Uw boekje " Ruimte en tyd " goed verkocht, maar in herdruk, tenminste in verband met uitverkocht zyn, was geen sprake.

Wy hebben den boekhandel n.l. tamelyk ruim in commissie gezonden en het overblyvende getal was 3 dagen na die zending by ons uitverkocht. Wy konden toen onmogelyk de exemplaren by den boekhandel terug vragen en hebben er toen maar zoo spoedig mogelyk 400 exemplaren by gedrukt.

De totale oplage van het boekje is dus geworden 1000 exemplaren.

Inmiddels met de meeste
Hoogachting,

D. Kirt

NIJGH & VAN DITMAR N.V.

DIRECTEUREN: J. TH. PIEK – D. ZIJLSTRA

ROTTERDAM
WIJNHAVEN 113
TELEFOON 27840

8 Juni 1939

Den Hooggeleerden Heer
Prof Dr J.A.Schouten c.i.
Rotterdamscheweg 111
Delft

Hooggeleerde Heer,

Wij hebben de eer U mede te deelen, dat over het boekjaar 1938 werden verkocht van

Ruimte en Tijd
3 ex. à f. 0.26¼ f. 0.78

welk bedrag wij heden op Uw girorekening nr. 29707 doen overschrijven.

Hoogachtend,
Nijgh & van Ditmar n.v.
L. Meyer

M/B.